教案二：三角分解法

基本内容提要：

1、克洛特三角分解法

2、杜里特尔分解法

3、乔列斯基分解法

4、追赶法

教学目的和要求：

1、掌握矩阵的三角分解方法

教学重点：

1、克洛特三角分解法

2、追赶法

教学难点：

推导矩阵的三角分解方法的计算公式

课程类型：

新知识理论课

教学方法:

结合提问，以讲授法为主

教学过程：

问题引入

高斯消去法的基本思想是把线性方程组变成同解的简单方程组求解. 之所以简单，是因为该方程组的系数矩阵为上三角矩阵.

如果方程组的系数矩阵可以直接分解为一个下三角矩阵和一个上三角矩阵的乘积，即

$$A = LU,$$

其中 L 为下三角矩阵， U 为一个上三角矩阵，那么原方程组 $Ax = b$ 等价于

$$(LU)x = L(Ux) = b.$$

如果记

$$Ux = y,$$

那么原方程组的求解等价于依次求解如下两个简单线性方程组：

$$Ly = b, \qquad Ux = y.$$

基于这种想法，本节将介绍求解线性方程组的三角分解法.

克洛特三角分解法

克洛特 (Crout) 三角分解法是把系数矩阵写成下三角矩阵与单位上三角矩阵乘积的方法，

杜里特尔分解法

与克洛特三角分解法不同，杜里特尔 (Doolittle) 三角分解法是把系数矩阵写成单位下三角矩阵和上三角矩阵乘积的方法，

乔列斯基分解法

乔列斯基 (Cholesky) 分解法或平方根法是针对系数矩阵为对称正定矩阵的线性方程组提出的三角分解法.

追赶法

如果线性方程组 $Ax = d$ 的系数矩阵是如下三对角矩阵:

$$A = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & & \\ & a_3 & b_3 & c_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & & a_n & b_n \end{pmatrix},$$

那么，利用克洛特三角分解法分解矩阵 A 时，我们可以要求下三角矩阵

$$L = \begin{pmatrix} l_1 & & & & & \\ a_2 & l_2 & & & & \\ & a_3 & l_3 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & a_{n-1} & l_{n-1} & \\ & & & & a_n & l_n \end{pmatrix},$$

单位上三角矩阵

$$U = \begin{pmatrix} 1 & u_1 & & & & \\ & 1 & u_2 & & & \\ & & 1 & u_3 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & 1 & u_{n-1} \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

利用矩阵乘积和相等的定义可知

$$\begin{cases} l_1 = b_1 \\ u_{i-1} = c_{i-1}/l_{i-1}, l_i = b_i - a_i u_{i-1}, \quad i = 2, 3, \cdots, n. \end{cases} \tag{1}$$

我们把上述求解三对角方程组的方法叫做追赶法，又称 Thomas 方法.

显然，像平方根法一样，由于追赶法充分利用了方程组的结构特征，所以其计算量比一般的三角分解法要少很多. 可以算出，追赶法仅需要 $4n-3$ 次乘除法.

必须注意，为了利用上面介绍的直接法，包括高斯消去法和各种三角分解法，求解线性方程组，其前提条件是各主元，即 $a_{ii}^{(i-1)}$, 或 l_{ii}, 或 u_{jj}, 或 l_i, 不为零. 否则，其三角分解式不存在 (计算中出现了 $\dfrac{a}{0}$, $a \neq 0$) 或有无穷多种三角分解式 (出现了 $\dfrac{0}{0}$). 保证主元全不为零的充分必要条件是：系数矩阵 A 的所有顺序主子式 $D_i(i=1,2,\cdots,n)$ 不为零.

主要内容总结

布置作业

参考文献

1. Burden R L, Faires J D. Numerical Ananlysis (Fourth Edition). Prindle, Boston, Weder & Schmidt, 1989.

2. Stoer J., Bulirsch R., Introduction to Numerical Analysis, Second Edition, Springer-Verlag, NewYork, 1992.

3. A. Ralston and P. Rabinowitz, A First Course in Numerical Analysis, Dover publication, 2001.

4. Cuyt A., Wuytack L., Nonlinear Methods in Numerical Analysis, Elsevier Science Publishers, B.V.,1987.

5. Richard L. Burden, J. Douglas Faires, Numerical Analysis (Seventh Edition), Brooks Pub. Co, 2001.

6. 蔡大用，白峰杉，《高等数值分析》，清华大学出版社，北京， 1998.

7. 邓建中、刘之行，计算方法 (第二版), 西安交通大学出版社， 2001.

8. 韩旭里，数值分析，中南大学出版社， 2003.

9. 李庆扬、关治、白峰杉，数值计算原理，清华大学出版社， 2000.

10. 李庆扬、王能超，易大义，数值分析 (第三版), 华中理工大学出版社， 1986.

11. 李庆扬、王能超，易大义，现代数值分析，高等教育出版社， 1995.

12. 施妙根、顾丽珍，科学和工程计算基础，清华大学出版社， 1999.